サイモン・ニウカム原著　山本一清飜譯
SIMON NEWCOMB—ISSEI YAMAMOTO

球面天文學要綱

COMPENDIUM OF SPHERICAL ASTRONOMY

第 1 部　豫備的な主題いろいろ

第 1 章　手 ほ ど き

この章は，種々の豫備事項 (Preliminary matters) のために費す．初めて天文學を學ぶ人は，とかく，數學的に嚴密な考へ方や研究方法を期待するかも知れないが，愈々實地に入つて見ると，屢々單なる近似値や省略算などで辛抱すべきことがある．しかし，これによつて決して嚴密さを失ひ，眞理から脫線するものでないといふありふれた實例を，下に掲げる．

1. 有限數値を極微數値として用ひること

天文算法では，微小な數を，極微數 (infinitessimal) として取り扱かひ，其の 2 乘以上を省略することが多い．其の根據は下の通りである．

今，u を x の函數卽ち $u=\phi(x)$ とし，x を $\varDelta x$ だけ變へた場合，u も同時に $\varDelta u$ だけ變つたとすれば

$$u+\Delta u=\phi(x+\Delta x) \tag{1}$$

テイラの定理で展げて見ると，

$$\Delta u=\frac{du}{dx}\,\Delta x+\frac{1}{2}\,\frac{d^2u}{d^2x}\,\Delta x^2+\cdots\cdots\cdots$$

若し $\varDelta x$ が或る限度 (Limit) 以下であり，du/dx 等の微分係數も大して大きくないとすれば，この右邊の第 2 項以下は省略しても宜い．たとへば $\varDelta x$ を $50''=0.00024$ (圓弧) とすれば，2 乘は，秒角に直すと，$\varDelta x^2=0''.012$ となる．天文研究では $0''.01$ ぐらゐの誤差は重要でない場合が多く，時には $0''.1$ や $1''$ の修正さへ不要なことがよくあるものである．もつと一般に言へば：

若し第二次微分係數 (Second derivatives) が 1 以下で，

$\pm 0''.01$ の誤差が重要でない場合，$\Delta x<50''$ であつたり，
$\pm 0''.1$　〃　，〃 $<150''$　〃
$\pm 1''.0$　〃　，〃 $<500''$　〃　すれば，

$$\Delta u=\frac{du}{dx}\,\Delta x \tag{2}$$

として，高次の項を棄てても宜い．若し第 2 次係數が 1 以上ならば，この限度

は同じ割り合ひで減じなければならぬ.

2. 小さい角を其の正弦や正切の代りに用ひること.

(2) に述べた原則から，小さい角を其の正弦や正切の代りに用ひ，余弦を 1 として了うことも常に行はれる．例へば，周知の展開式で，

$$\sin s = s - \tfrac{1}{6}s^3 + \cdots\cdots$$
$$\tan s = s + \tfrac{1}{3}s^3 + \cdots\cdots$$

となるから，s の第三次項までは下の式を用ひても宜い.

$$\left.\begin{aligned}\sin s &= s\,(1 - \tfrac{1}{6}s^2)\\ \tan s &= s\,(1 + \tfrac{1}{3}s^2)\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}s &= \sin s\,(1 + \tfrac{1}{6}\sin^2 s)\\ s &= \tan s\,(1 - \tfrac{1}{3}\tan^2 s)\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

但し，これは角度を皆ラデヤン (radian) で表はしたものであるが，實際計算には殆んど常に度分秒を用ひるし，小さい角は秒を單位として，$''$ で表はすので，其れを圓弧に直すためには，$1''$ を圓弧で表はしたもの（殆んど $\sin 1'$ に同じ）を乘ずる．卽ち $s = s''\sin 1''$ である．1 ラデヤンは $206265''$（もつと正確には $206264''.806$）であるから，$s'' = 206265''s = [5.314425]s$ 但し此の括弧中の數は係數の對數である．かうして係數を其の對數で表はす形はごく普通に行はれる．さて，$206264''.806$ の代りに R と置けば，(4) の代りに

$$\left.\begin{aligned}s'' &= R''\sin s\,(1 + \tfrac{1}{6}\sin^2 s)\\ s'' &= R''\tan s\,(1 - \tfrac{1}{3}\tan^2 s)\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

若し小角のいろんな羃を含む列ならば，それを取り扱ふ最も簡便法は，各項の係數を一つだけ秒に直し，他を其のまゝにして置く．例へば，一般に

$$s = a + bs^2 + cs^3 + \cdots\cdots$$

は，秒にすると，

$$s'' = a'' + bs''s + cs''s^2 + \cdots\cdots$$

但し，$s'' = R''s$，$a'' = R''a$ であり，s や s^2 はラデヤンで表はしたものである.

或る限度以下では，係數 $\sin^2 s$ を (3) や (4) から棄てても宜い．此の限度とは

$$\tfrac{1}{6}s'' \times \sin^2 s \qquad \text{又は} \qquad \tfrac{1}{3}s'' \times \tan^2 s$$

の如き積が最終の結果に影響しないほど小さい場合である．若し $0''.01$ 位の誤差があつても差し支へ無いならば，s'' の最大限は下式のもの以下である.

$$\tfrac{1}{3}s'' \times \sin^2 s = 0''.01 \qquad \text{卽ち} \qquad \sin^2 s = 0''.03/s''$$

又，(4) や (5) の代りに $\sin s = s''/R$ を用ひても宜い．此の式の 2 乘を前のものと等しいと置くと，$s''^3 = 0.03R^2$ となり，s は $1000''$ を超える．故に，一般法則としては，この限度以下の角度には，正弦も，正切も，角度も，無差別に

用ひて宜い.

小さい角の余弦を1と置くのも，同様に考へれば宜い．1000″の余弦と1との差は 1/85000 よりも小さいのだから．若し $A\times\cos s$ といふ形の式に於いて，$0.000012A$ くらゐの誤差があつても差し支へないのならば，常に下の如く考へて宜い：

$$\text{若し}\quad s'' < 1000''^{*}\quad \text{ならば,}\ \cos s = 1$$

3. 計算上に避け難い誤差

物理量は，數學的正確さで決定することは出來ない．長さ，重さ，容積その他の量も皆，測れば必ず誤差を伴ふもので，細かい所に注意して其れを減ずる事は出來るけれど，しかし，絕對に無くはならない．千分ノ1の誤差を伴ふ測定は屢々あるし，百萬分ノ1以下まで確認されてゐる基本量といふものは極めて稀である．かりに嚴密な測定は可能でも，それを或る數系で嚴密に言ひ表はすことは不可能である．或る量を表はすのに，一基數の漸減冪による無限數列で表はす事は，實際上の最良方法である．吾々の傳統によれば，數系の基數は10である．或は12を用ひた方が，更に良いのかも知れないけれど，それは實用上に不便である．十進法では，桁を增す毎に，最大誤差は十分の1づつ減じるけれど，只，そんなにして，具體的な或る物理量の嚴密な數値や，10の倍數や根でない數の，對數に單に近づくのみである．一般には，實際上到達し得る精密限度以上に小數位を加へることは無用である．

數の計算（殊に對數計算）の場合には，常に其の到達し得る精密度のこと，更に詳しく言へば，卽ち資料に含まれる誤差の大小を，考へるべきである．結果の精度は，それに用ひる資料の精度によつて制限されるのであつて，計算を如何に精密に行つても，結果は必ず其の材料の誤差に影響される．計算に用ひる桁數が增せば勞力も增すのだから，計算者が仕事にかゝる時，まづ考へるべき問題は，幾桁の對數を使つたならば，結果の誤差が對數誤差のために大きくならないで濟むかといふことである．普通に用ひられる對數表は3桁から7桁であるが，最後の桁の次ぎの桁が省略されてあるために起る誤差の問題を先づ考へなければならない．

今，q を或る數の眞の値とし，$\pm\delta$ を求めた數値の誤差とすれば，計算によつて得る値は $q\pm\delta$ である．さて，或る桁以下が切り棄てられてある對數を用ひたために，δ の値が如何に現はれるかを知るには（δ を極微量として），q の誤差 δ に對應する對數の誤差は，

$$\log(q+\delta)-\log q=\log\left(1+\frac{\delta}{q}\right)=M\,\frac{\delta}{q} \qquad (6)$$

---

* 角度を何度何分何秒と言ひ表はす場合を，一般に“圓弧で表はす”と言ふ．

但し，M は對數根 (modulus) で，即ち 0.43429…… である．

若し，n 桁の對數を使ふならば，その最後の桁は10^{-n} であるから，對數の誤りは此の單位以下の數値であるけれど，しかし，其んなものを幾つか加へると，單位以上にも上ることがあるわけである．$\log q$ の最後の桁に 1 だけ誤りがあるとすれば，

$$M\frac{\delta}{q}=10^{-n} \qquad \text{及び} \qquad \delta=\frac{10^{-n}}{M}q$$

故に，n に，3 から 7 までの數を順に入れれば，其れに應ずる q の誤りは：

$$\left.\begin{array}{lll} \text{3 桁の對數では,} & \delta = \pm 0.0023\ q \\ 4 \quad // & // = \pm 0.00023\ q \\ 5 \quad // & // = \pm 0.000023\ q \\ 6 \quad // & // = \pm 0.0000023\ q \\ 7 \quad // & // = \pm 0.00000023\ q \end{array}\right\} \qquad (7)$$

概數で言へば，3 桁の對數を用ひれば，眞數の400分の 1 まで正確であり，4 桁の對數ならば，眞數の4000分の1まで正確である．云々．又，逆に100分の 1 まで正確な結果を得ようとすれば，3 桁の對數を用ひるが宜く，1000 分の 1 まで正確に得ようとすれば，4 桁の對數を用ひるが宜い．即ち一般に10^n 分の 1 まで求めるには，$n+1$ 桁の對數を用ひるべきである．

4. 上記の法則は只對數の誤りと其れに應ずる眞數の誤りとの關係を示すものであるが，資料の誤差と結果の誤差との間の關係は次ぎの如く言ひ表はし得る：即ち，u, v, w 等を與へられた資材とし，計算すべき數値を p とすれば，p を u, v, w 等の函數と考へられる．若し，δu, δv, δw 等を此等の資材の誤差とすれば，p の誤差は

$$\delta p=\frac{dp}{du}\delta u+\frac{dp}{dv}\delta v+\frac{dp}{dw}\delta w+\cdots\cdots \qquad (8)$$

若し此の式の中の微分係數が大きければ，結果の誤差も，其の割り合ひで，資材の誤差より大きくなる．

こんな場合は，小さい角を其の余弦や，又は 90° に近い場合の正弦から決定する時に起る．即ち，角の誤差は函數の誤差より幾倍も大きくなる．故に，出來れば，其の正切から角度を決定するのが宜い．

普通の計算では，例へば2ケの殆んど同じほどの大きい數の差とか，商とか，又は 2 ケの小さい數の商から結果を求める場合に，このやうな事が起る．かやうな場合には，法則として述べたよりも以上の精密さを得るために對數の桁數を増さねばならぬ．（つづく）